www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE POLYTECHNIQUE **OPTION M'**

CONCOURS D'ADMISSION 1989

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Dans tout le problème, λ est un réel strictement positif ; on considère l'équation

$$\text{E} \qquad f'(x) = f(\lambda x)$$

et une partie I de $\mathbb{R}$ qui, selon les cas, sera $]0, +\infty[$, $]-\infty, 0[$ ou $\mathbb{R}$ lui-même. On appelle solution de E sur I toute fonction f à valeurs réelles définie et dérivable sur I et qui vérifie E en tout point x de I.

Questions préliminaires.

1. Soit f une solution de E sur I.

a. Montrer que f est de classe C^∞ sur I.

b. Pour tout entier $p \geqslant 1$, calculer la dérivée $p^{\text{ème}}$ $f^{(p)}(x)$ en fonction de λ et d'une valeur convenable de f.

2. Pour $\lambda = 1$, quelles sont les solutions de E sur $\mathbb{R}$?

♦

I

Dans cette partie, $\lambda \in]0, 1[$ et f est une solution de E sur $\mathbb{R}$.

1. a. Montrer que f est développable en une série entière de la variable x dont on donnera le rayon de convergence et dont on explicitera les termes.

b. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des solutions de E sur $\mathbb{R}$?

2. Dans toute la suite de la partie I, on suppose que $f(0) = 1$ et on note F la fonction des deux variables x et λ définie sur $\mathbb{R} \times]0, 1[$ et égale à la somme de la série entière qui développe f.

a. La fonction F est-elle indéfiniment dérivable par rapport à λ ?

b. La fonction F est-elle continue par rapport au couple (x, λ) sur $\mathbb{R} \times]0, 1[$?

3. Soient α et β deux réels strictement positifs.

a. Lorsque x tend vers $+\infty$, comparer $f(x)$ à x^α et à $e^{\beta x}$.

b. Quelle est l'allure du graphe de f lorsque x tend vers $+\infty$?

4. En majorant ou en minorant $f(x) - f(\frac{x}{\lambda})$, montrer par l'absurde que f s'annule une infinité de fois lorsque x tend vers $-\infty$.

♦

.../...

II

Dans cette partie, $\lambda \in]0, 1[$ et on étudie certaines solutions g de E sur $]0, +\infty[$. On fixe un réel $a > 0$; on se donne une fonction φ_1 à valeurs positives, non constamment nulle, définie et de classe C^∞ sur l'intervalle $[\lambda a, a]$, et on considère la fonction φ définie sur le même intervalle par

$$\varphi(\lambda a) = \varphi(a) = 0 ; \qquad \varphi(x) = \varphi_1(x) e^{1/(x-a)(x-\lambda a)} \qquad (\lambda a < x < a) \quad .$$

1. Calculer les valeurs numériques des dérivées successives de φ à droite en λa et à gauche en a.

2. a. Etablir par récurrence l'existence d'une solution g de E sur $]0, +\infty[$ admettant φ pour restriction sur $[\lambda a, a]$.

b. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des solutions de E sur $]0, +\infty[$?

3. a. Montrer que g s'annule une infinité de fois lorsque x tend vers 0.

b. La fonction g peut-elle avoir une limite lorsque x tend vers 0 ?

c. La fonction g peut-elle être bornée sur $]0, a]$?

d. Soit A_n la borne supérieure de $|g|$ sur l'intervalle $[\lambda^{n+1} a, \lambda^n a]$ $(n \in \mathbb{N})$. Quel est le comportement de la suite de terme général A_n et celui de la suite de terme général $\sqrt[n]{A_n}$?

4. a. Préciser le signe et le sens de variation de g'' sur $[\lambda^{-3} a, +\infty[$.

b. Quel est le comportement de g lorsque x tend vers $+\infty$?

♦

III

Dans cette partie λ est strictement plus grand que 1 et a est encore un réel strictement positif.

1. Soit h une solution de E sur $]0, +\infty[$. Montrer que h s'annule une infinité de fois lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Soit M la borne supérieure de $|h|$ sur $[a, \lambda a]$. On pose $K = 1 - \lambda^{-1}$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [\lambda^{-n-1} a, \lambda^{-n} a]$, montrer que

$$|h(x)| \leqslant M \prod_{p=0}^{n} (1 + Ka\lambda^{-p}) .$$

b. En déduire que h est bornée sur $]0, a]$.

c. Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, montrer que h admet une limite finie ℓ et que chacune de ses dérivées admet aussi une limite finie qu'on calculera en fonction de ℓ, λ et de l'ordre de la dérivée considérée.

3. Comment les résultats de la question III.2 se modifient-ils lorsqu'on remplace à la fois a par un réel $a' < 0$ et h par une solution k de E sur $]-\infty, 0[$?

.../...

4. Soit φ_1 une fonction à valeurs positives, non constamment nulle, définie et de classe C^∞ sur l'intervalle $[a, \lambda a]$; on considère les fonctions φ et ψ définies sur $[a, \lambda a]$ par

$$\varphi(a) = \varphi(\lambda a) = 0 ; \qquad \varphi(x) = \varphi_1(x)e^{1/(x-a)(x-\lambda a)} \qquad (a < x < \lambda a) ;$$

$$\psi(x) = \int_x^{\lambda a} \varphi(t)dt \quad .$$

a. Calculer les valeurs numériques des dérivées successives de ψ à droite en a et à gauche en λa.

b. Etablir l'existence d'une solution h_1 de E sur $]0, +\infty[$ admettant ψ pour restriction sur $[a, \lambda a]$.

c. On suppose $a < 1$. Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout $x \in [\lambda^{-n-1}a, \lambda^{-n}a]$, minorer $h_1(x) - h_1(a)$ par une somme partielle d'une série géométrique appropriée et en déduire que, lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, h_1 a une limite strictement positive.

5. Dans cette seule question, on suppose que $\lambda = 2$, on choisit $a = 0{,}5$ et φ_1 égale sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$ à une constante réelle telle que $\int_{1/2}^{1} \varphi(t)dt = 1$.

a. Quelle symétrie le graphe de la fonction ψ présente-t-il ?

b. En déduire la valeur numérique de $\int_{1/2}^{1} \psi(x)dx$.

c. Soit h_1 la solution de E sur $]0, +\infty[$ admettant ψ pour restriction sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Dessiner l'allure du graphe de h_1 relatif à l'intervalle $]0, 1]$, en indiquant les coordonnées des extrema, celles des inflexions éventuelles, le sens de la convexité de ce graphe et la pente de sa tangente au point d'abscisse $\frac{1}{4}$.

d. En prolongeant h_1 par continuité en 0, préciser l'intersection avec l'axe des abscisses de la tangente au point $(0, h_1(0))$ du graphe de h_1 et donner pour $h_1(0)$ un encadrement numérique de largeur inférieure à 0,1.

6. a. Montrer qu'il existe des solutions k_1 de E sur $]-\infty, 0[$ non constamment nulles et que chacune d'elles est la restriction d'une solution f de E sur $\mathbb{R}$.

b. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des solutions de E sur $\mathbb{R}$?

c. Si f est une solution de E sur $\mathbb{R}$ non constamment nulle, est-elle développable en série entière de la variable x dans un voisinage de 0 ?

♦ ♦
♦

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail